



ASSOCIAÇÃO  
BRASILEIRA  
DE NORMAS  
TÉCNICAS

# MÓDULO DE ELASTICIDADE



"do Laboratório de Pesquisa ao Canteiro de Obras"

**Paulo Helene**  
*Diretor PhD*  
*Prof. Titular USP*

ABNT

07.02.2013

São Paulo

1

## ABNT NBR 6118:2007

- Módulo de elasticidade tangente:

$$E_{ci} = 5600 f_{ck}^{1/2} \text{ [MPa]}$$

- Módulo de elasticidade secante:

$$E_{cs} = 0,85 E_{ci} \text{ [MPa]}$$

direitos reservados 2012

PhD Engenharia

2

## ABNT NBR 8522:2008

- Módulo de elasticidade tangente: é equivalente ao módulo de deformação secante ou cordal a  $30\% f_c$ .”  
→ Obtido através da escorvação do gráfico tensão-deformação, até a linearização na curva.

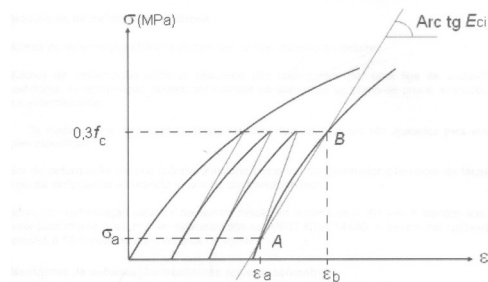


Figura 2 — Representação esquemática do módulo de elasticidade ou módulo de deformação tangente inicial ( $E_{ci}$ )

direitos reservados 2012

PhD Engenharia

3

## ABNT NBR 8522:2008

- Módulo de elasticidade secante: obtido através do coeficiente angular da reta secante ao diagrama tensão-deformação específica, partindo da origem.

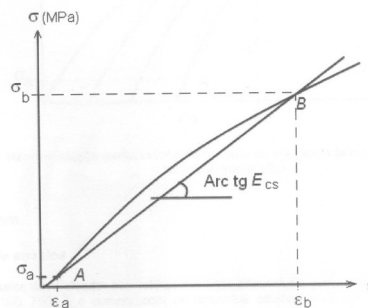


Figura 1 — Representação esquemática do módulo de deformação secante ( $E_{cs}$ )

direitos reservados 2012

PhD Engenharia

4

## CEB *fib* Model Code 2010\*\*

➤ Módulo de elasticidade tangente (p/  $0,4f_{cm}$ ):

$$E_{ci} = E_{co} * \alpha_E * [(f_{ck} + \Delta f)/10]^{1/3} \text{ [MPa]}$$

se o  $f_{cm}$  for conhecido:

$$E_{ci} = E_{co} * \alpha_E * (f_{cm}/10)^{1/3} \text{ [MPa]}$$

Sendo:

$$E_{co} = 21,5 \cdot 10^3 \text{ [MPa];}$$

$$\alpha_E = 1,2 - \text{basalto;}$$

1,0 - granito e gnaiss;

0,9 - calcário;

0,7 - arenito;

$$\Delta f = 8 \text{ MPa.}$$

direitos reservados 2012

**PhD Engenharia**

5

## CEB *fib* Model Code 2010\*\*

➤ Módulo de elasticidade reduzido (ou secante, p/  $0,4f_{cm}$ ):

$$E_c = \alpha_i * E_{ci} \text{ [MPa]}$$

Sendo:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 * (f_{cm}/88) \leq 1,0$$

direitos reservados 2012

**PhD Engenharia**

6

## CEB *fib* Model Code 2010\*\*

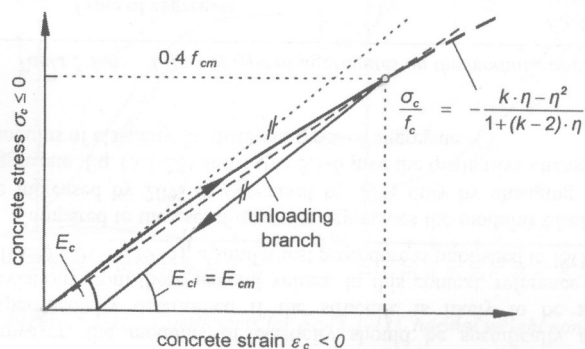


Figure 5.1-2: Definition of different moduli of elasticity (according to fib Bulletin 42)

direitos reservados 2012

PhD Engenharia

7

## Eurocode 2004\*\*

- Módulo de elasticidade secante (para  $0,4f_{cm}$ ):

$$E_{cm} = 22 * \left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{0,3} \text{ [MPa]}$$

Obs.:

- Para agregados de granito e gnaiss, não há redução no valor de  $E_{cm}$ ;
- Para agregados de calcário e arenito, deve-se reduzir o valor em 10% e 30%, respectivamente;
- Para agregados de basalto, aumenta-se em 20%.

- Módulo de elasticidade tangente:

$$E_c = 1,05 * E_{cm}$$

direitos reservados 2012

PhD Engenharia

8

## ACI 318-11

- Módulo de elasticidade secante: a inclinação da linha traçada a partir da origem a uma tensão de compressão de  $0,45f'_c$

$$E_c = w_c^{1,5} * 0,043f'_c{}^{1/2} \text{ [MPa]}$$

Obs.: para valores de  $w_c$  entre 1440 e 2480 kg/m<sup>3</sup>;

- Para concretos de densidade normal:

$$E_c = 4700 f'_c{}^{1/2} \text{ [MPa]}$$

## ASTM 469/ STP 169D

- Escorva 2 vezes e lê na terceira
- Corresponde à tensão de  $0,4 * f'_c$

## ASTM 469/ STP 169D

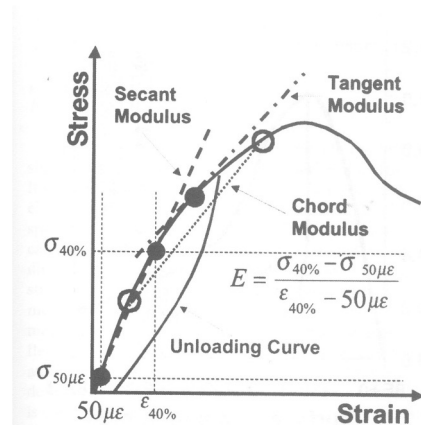


Fig. 3—Various forms of static modulus of elasticity.

direitos reservados 2012

PhD Engenharia

11

## DIN 1048 (tangente ou secante?)

- O módulo estático de deformação é determinado através da equação:

$$E_b = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{\epsilon_o - \epsilon_u}$$

sendo:

$\sigma_o$  = Tensão máxima durante o terceiro ciclo de carregamento (0,33\* $f_{cm}$ );

$\sigma_u$  = Tensão mínima anterior ao terceiro ciclo de carregamento;

$\epsilon_o$  = Deformação média gerada pela tensão no ponto B (vide gráfico);

$\epsilon_u$  = Deformação média gerada pela tensão no ponto A (vide gráfico);

direitos reservados 2012

PhD Engenharia

12

# DIN 1048

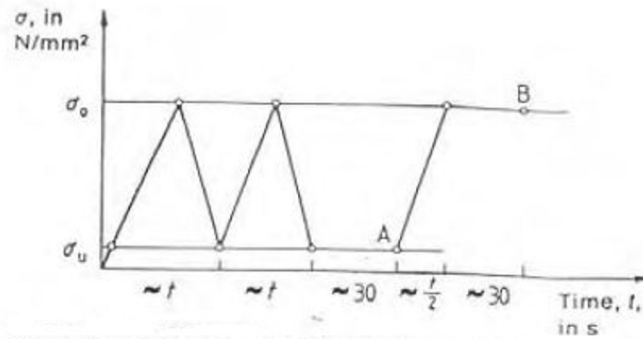


Figure 6. Stress-time diagram for determining the modulus of elasticity

escorva duas vezes e lê na terceira

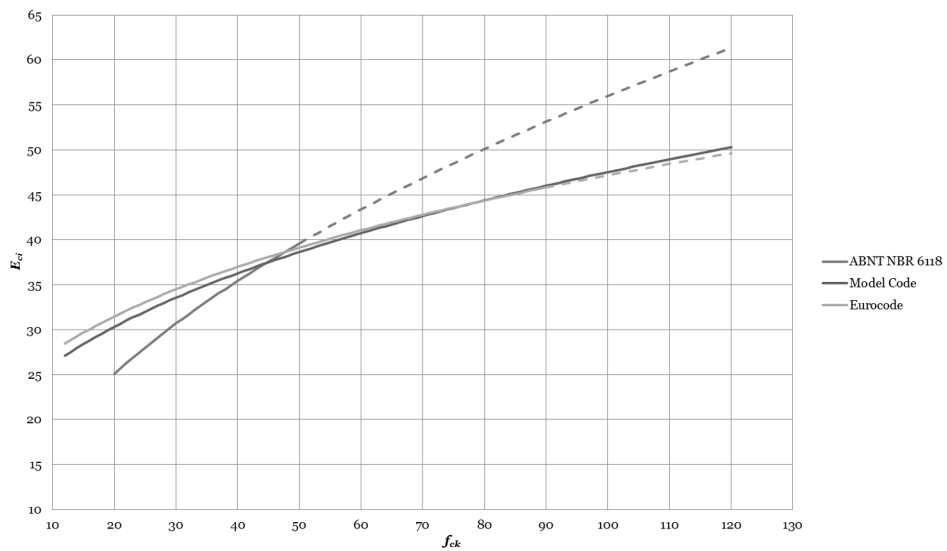
direitos reservados aos

PhD Engenharia

13

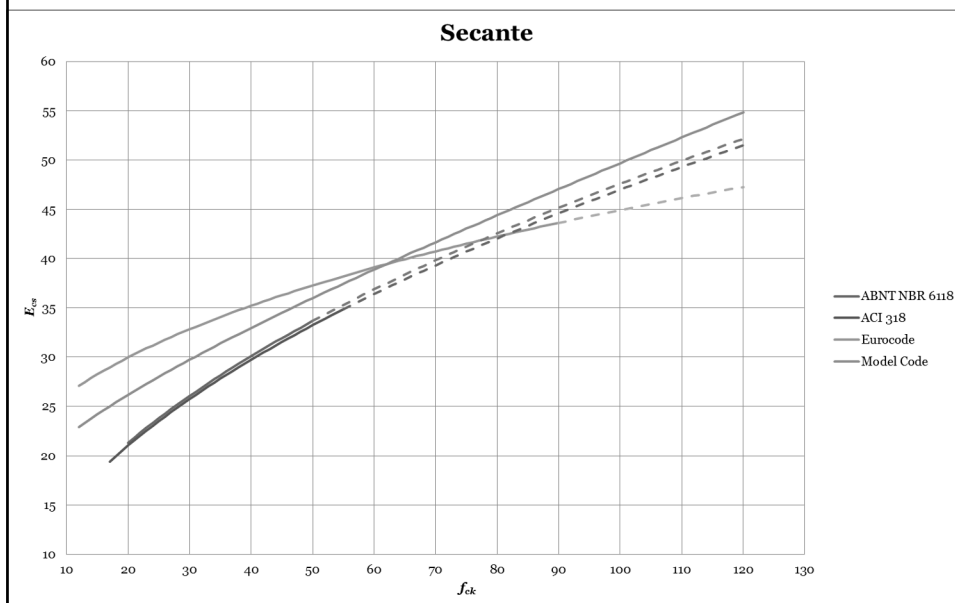
# Módulo - Tangente

## Tangente



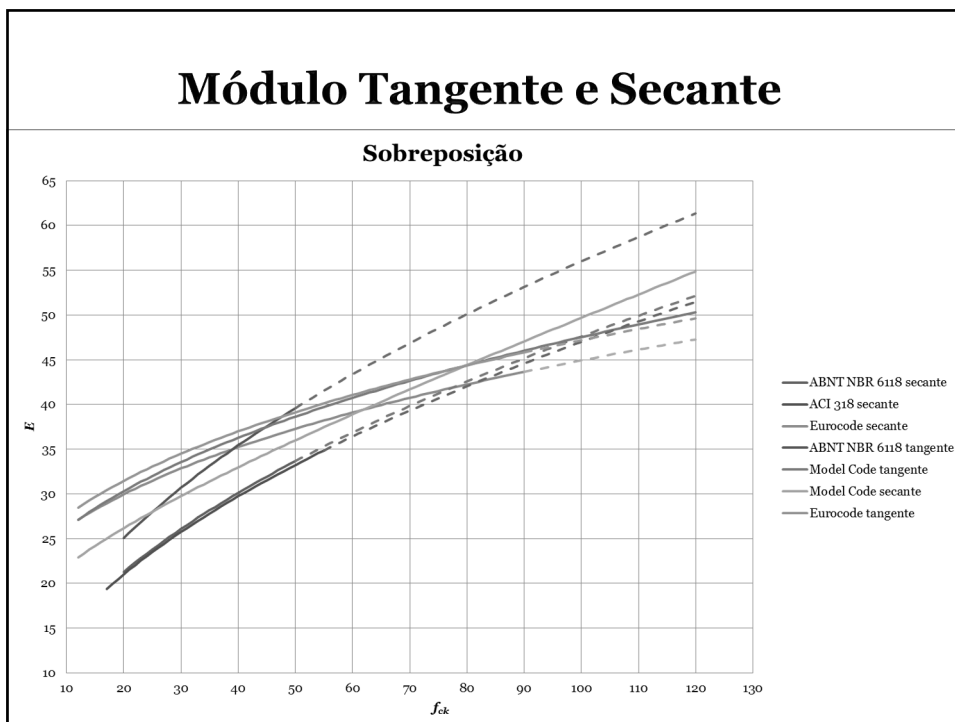
14

## Módulo - Secante



15

## Módulo Tangente e Secante



16



## **EUROCODE 2**

Simbologia geral utilizada:

- $E_{c, Ec(28)}$ : Módulo de Elasticidade Tangente para concreto de densidade normal submetido à tensão  $\sigma_c=0$
- $E_{c, eff}$ : Módulo de elasticidade efetivo do concreto
- $E_{cd}$ : Valor de cálculo do Módulo de Elasticidade do concreto
- $E_{cm}$ : Módulo de Elasticidade Secante do concreto
- $E_{c(t)}$ : Módulo de Elasticidade Tangente para concreto de densidade normal submetido à tensão  $\sigma_c=0$ , numa determinada idade “t” (em dias).
- $E_s$ : Valor de cálculo do Módulo de Elasticidade da armadura de reforço
- $f_{cm}$ : resistência à compressão média do concreto aos 28 dias de idade
- $f_{ck}$ : resistência característica à compressão de corpo de prova cilíndrico de concreto aos 28 dias de idade
- $\epsilon_c$ : deformação devido à compressão no concreto
- $\epsilon_{cl}$ : deformação devido à compressão máxima resistida pelo concreto
- $\epsilon_{cu}$ : deformação última devido à compressão do concreto
- $I_c$ : Momento de inércia da seção de concreto
- $I_s$ : Momento de inércia da área de aço colocada no centro da área de

17

### 5.8.6 – General Method

Equação 5.2  $E_{cd} = E_{cm} / \gamma_{cE}$

Sendo  $\gamma_{cE}$  definido no Anexo Nacional utilizado

#### 3.1.3 Elastic Deformation

Tabela 3.1  $E_{cm} = 22 * f_{cm} / 100,3$  [MPa]

$f_{cm} = f_{ck} + 8$  [MPa]

Equação 3.5  $E_{cm(t)} = (f_{cm(t)} / f_{cm})^{0,3} * E_{cm}$  [MPa]

18

fib MODEL CODE

$E$  = modulus of elasticity

$E_c$  = reduced modulus of elasticity  
for concrete

$E_c(t_0)$  = modulus of elasticity at the  
time of loading  $t_0$

$E_{ci}$  = tangent modulus of elasticity  
at a stress  $\sigma_i$  (at  $T = 20^\circ\text{C}$ )

$E_{c,sec}$  = secant modulus of elasticity  
at failure for uniaxial compression:

$$(E_{c,sec} = f_{cm} / |\epsilon_{c0}|)$$

19

MODEL CODE

**5.1.7.2 Modulus of elasticity**

$$(Eq. 5.1-20) E_{ci} = E_{c0} * \alpha_E * [(f_{ck} + \Delta f)/10]^{1/3} \text{ [MPa]}$$

se o  $f_{cm}$  for conhecido:

$$(Eq. 5.1-21) E_{ci} = E_{c0} * \alpha_E * f_{cm}^{1/3} \text{ [MPa]}$$

Sendo:

$$E_{c0} = 21,5 \cdot 10^3 \text{ [MPa];}$$

$$\alpha_E = 1,2 \text{ - basalto;}$$

1,0 - granito e gnaiss;

0,9 - calcário;

0,7 - arenito;

$$\Delta f = 8 \text{ MPa.}$$

$$(Eq. 5.1-23) E_c = \alpha_i * E_{ci}$$

onde:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 * (f_{cm}/88) \leq 1,0$$

20

**American Concrete Institute *ACI 318-11 Building Code*  
*Requirements for Structural Concrete***

8.5 – Módulo de Elasticidade

8.5.1 - O módulo de elasticidade secante  $E_c$ , para concretos de densidade normal, pode ser calculado através da expressão por:

$$E_c = w_c^{1,5} * 0,043 f_c' ^{1/2} \text{ (MPa)}$$

Obs.: para valores de  $w_c$  entre 1440 e 2480 kg/m<sup>3</sup>

o módulo de elasticidade secante corresponde a tensão de  $0,45 * f'c$ .  
Não há menção ao módulo de elasticidade tangente.

ASTM 469 → 0,4  $f_c$   
Escorva com 2 carregamentos

21

DIN 1048

Carga 0,33 fcm e escorva 2 vezes

22

Abertura de fissuras: item 17.3.3.2 da ABNT NBR 6118 → não depende de  $E_c$

Momento de fissuração: item 17.3.1 → não depende de  $E_c$

Flecha imediata em vigas de concreto armado: item 17.3.2.1.1 → depende do produto  $E_c I_c$

Análise de estabilidade individual : item 15.5.2 → depende do produto  $E_c I_c$

Análise de estabilidade global: item 15.5.2 → depende do produto  $E_c I_c$

Módulo de elasticidade transversal: item 8.2.9 →  $G_c = 0,4E_c$

Perdas da força de protensão: item 9.6.3 → depende de  $E_{ci}$

Fluência do concreto: item 11.3.3.2 → depende de  $E_{ci}$

23

$E_{ci}$  - Módulo de elasticidade ou módulo de deformação tangente inicial do concreto, referindo-se sempre ao módulo cordal a  $30\% f_c$

$E_{cs}$  - Módulo de elasticidade secante do concreto, também denominado módulo de deformação secante do concreto

$E_{ci}(t_0)$  - Módulo de elasticidade ou módulo de deformação inicial do concreto no instante  $t_0$

$E_{ci28}$  - Módulo de elasticidade ou módulo de deformação inicial do concreto aos 28 dias

$E_p$  - Módulo de elasticidade do aço de armadura ativa

$E_s$  - Módulo de elasticidade do aço de armadura passiva

$I_c$  → momento de inércia

24

# OBRIGADO!



*"do Laboratório de Pesquisa ao Canteiro de Obras"*

**PhD Engenharia**  
[www.concretophd.com.br](http://www.concretophd.com.br)  
[www.phd.eng.br](http://www.phd.eng.br)